

1. Определение сходимости числового ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \text{ Если предел существует, то } S \text{ называют суммой числового ряда}$$

2. Критерий Коши сходимости числового ряда (необходимое условие сходимости).

$$\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon, S_n = \sum_{k=1}^n u_k - \text{частичная сумма ряда}$$

$$\text{Следствие(необходимое условие сходимости): } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$$

3. Признаки сравнения сходимости числовых рядов (общий и частный).

Общий признак: Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ — два числовых ряда и $0 \leq p_k \leq q_k (\forall k \geq k_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \rightarrow &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k \nrightarrow &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q_k \nrightarrow \end{aligned}$$

Частный признак: Пусть $p_k = O^*\left(\frac{1}{k^\alpha}\right), k \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \alpha > 1$
 $\nrightarrow \alpha \leq 1$

4. Признак Даламбера сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0 \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow q < 1$$

$$\nrightarrow q > 1$$

5. Признак Коши сходимости числовых рядов.

$$p_k \geq 0 \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_k} = q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow q < 1$$

$$\nrightarrow q > 1$$

6. Признак Раабе сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0 \exists \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{p_k}{p_{k+1}} - 1 \right) = \mu \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \mu < 1$$

$$\nrightarrow \mu > 1$$

7. Признак Гаусса сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0 \frac{p_k}{p_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}} |c_k| < M, \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rightarrow \lambda > 1; \lambda = 1, \mu > 1$$

$$\nrightarrow \lambda < 1; \lambda = 1, \mu \leq 1$$

8. Интегральный признак Коши-Маклорена сходимости числовых рядов.

$$f(x) \geq 0, f(x) \searrow \forall x \geq n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_n^{\infty} f(x) dx \text{ и } \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \rightarrow \text{одновременно}$$

9. Определение абсолютной и условной сходимости числовых рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс}}, \text{ если } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{усл}}, \text{ если } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow, \text{ а } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \nrightarrow$$

10. Теорема Коши о сумме абсолютно сходящегося ряда.

$$\text{Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k - \text{ряд, полученный перестановкой членов ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

$$\text{Теорема Коши: Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс}} V \Rightarrow \forall \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \xrightarrow{\text{абс}} V$$

11. Теорема Римана о сумме условно сходящегося ряда.

$$\text{Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k - \text{ряд, полученный перестановкой членов ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \text{ тогда если}$$

$$\text{Теорема Римана: Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{усл}} \Rightarrow \forall L \in \mathbb{R} \exists \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \rightarrow L$$

12. Признак Лейбница сходимости числового ряда (оценка остаточного члена).

Пусть $p_k \geq 0, p_{k+1} \leq p_k, \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \Rightarrow$ знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} p_k \rightarrow$, причем $|S_n - S| \leq p_{n+1}$

13. Признак Абеля сходимости числовых рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow \\ 2) \{v_k\} - \text{монотонная} \\ 3) \{v_k\} - \text{ограниченная} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \rightarrow$$

14. Признак Дирихле сходимости числовых рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq M \text{ (частичные суммы являются ограниченной последовательностью)} \\ 2) \{v_k\} - \text{монотонная} \\ 3) \{v_k\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \rightarrow$$

15. Метод Пуассона-Абеля обобщенного суммирования рядов.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — имеет обобщенную сумму по Пуассону — Абелю, если $\forall x \in (0,1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} \rightarrow S(x), \exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S$ — сумма по Пуассону — Абелю

16. Метод Чезаро обобщенного суммирования рядов.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — имеет обобщенную сумму по Чезаро, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = S$ — сумма по Чезаро, где $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

17. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности.

$$f_n(x) \xrightarrow[\{x\}]{} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N, \forall x \in \{x\} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

18. Определение равномерной сходимости функционального ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} S(x) \Leftrightarrow S_n(x) \xrightarrow[\{x\}]{} S(x), S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

19. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in \{x\} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

20. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\text{Пусть } \exists \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rightarrow, |u_k(x)| \leq c_k \forall x \in \{x\} (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

21. Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \\ 2) v_k(x) - \text{монотонна } \forall x \in \{x\} \\ 3) v_k(x) - \text{равномерно ограничена на } \{x\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

22. Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\left. \begin{array}{l} 1) U_n = \sum_{k=1}^n u_k(x) \text{ равномерно ограничены на } \{x\} \\ 2) v_k(x) - \text{монотонна } \forall x \in \{x\} \\ 3) v_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

23. Теорема о пределе равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

$$f_n(x) \xrightarrow[\{x\}]{} f(x), f_n(x) \in C\{x\} \forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \forall n \in \mathbb{N} (a \in \{x\}) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = f(a), \text{ причем } f(x) \in C(\{x\})$$

24. Теорема о пределе суммы равномерно сходящегося ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow[\{x\}]{} S(x), \exists \lim_{x \rightarrow a} u_k(x) \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} S(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_k(x)$$

25. Теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящегося ряда.

$$\exists u'_k(x) \forall x \in \{x\} \forall k \in \mathbb{N}, u'_k(x) \xrightarrow[(a,b)]{} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow[(a,b)]{} S(x), \exists S'(x) \text{ на } (a,b), S'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

26. Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{[a,b]}{\Rightarrow} S(x), u_k(x) \in R[a, b] \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx \rightarrow \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

27. Определение степенного ряда. Радиус сходимости.

Функциональный ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, a_k \in \mathbb{R}$, называют степенным рядом.

Число $R \geq 0$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \rightarrow |x - x_0| < R$
 $\nrightarrow |x - x_0| > R$ называют радиусом сходимости степенного ряда.

28. Теорема Коши-Адамара о радиусе сходимости степенного ряда.

Пусть $L = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ Если $L \neq 0$ и конечно, то $\exists R = \frac{1}{L}$:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \xrightarrow{\text{абс}}$ в интервале $|x - x_0| < R$ и $\nrightarrow$ вне этого интервала ($|x - x_0| > R$). Если $L = +\infty$, то степенной ряд сходится только при $x = x_0$. Если $L = 0$, то степенной ряд $\rightarrow$ при $x \in (-\infty; +\infty)$

29. Определение 2-го интеграла.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область с границей Γ площади нуль.

Разобьем область Ω при помощи конечного числа произвольных кривых площади нуль

на конечное число замкнутых частичных областей $\Omega_1, \Omega_2, \dots$,

$\Delta\Omega_i$ — площадь $\Omega_i, P_i(\xi_i, \eta_i)$ — произвольная точка в области Ω_i

$d_i = \sup_{\mu_1, \mu_2 \in \Omega_i} \varphi(\mu_1, \mu_2), L = \max_i d_i$

Опр.: $\iint_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \lim_{L \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta\Omega_i$, если этот предел существует и не зависит от выбора точек P_i .

Alternative:

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x, y)$,

распространенным на ограниченную замкнутую квадрируемую область Ω , называют число

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j, \text{ где } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

и суммирование распространяется на те значения i и j , для которых $(x_i, y_j) \in \Omega$

30. Теорема о сведении 2-го интеграла к повторному.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

31. Теорема о замене переменных в 2-ом интеграле.

$$\Omega \xrightarrow[\substack{x=x(u,v) \\ y=y(u,v)}}{\Omega'}$$

Пусть выполнено:

- 1) Ω, Ω' — замкнуты и ограничены
- 2) Соответствие взаимнооднозначное
- 3) $x(u, v), y(u, v) \in C^1(\Omega')$
- 4) $I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$ на Ω

$$\text{Тогда } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv$$

32. Определение 3-го интеграла.

Пусть V — замкнутая ограниченная кубируемая область в пространстве.

Тогда если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta y_j| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = I,$$

$$u_i \in [x_i, x_{i+1}], v_j \in [y_j, y_{j+1}], w_k \in [z_k, z_{k+1}],$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

не зависящий от выбора точек u_i, v_j, w_k , то этот предел называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$

по области V . $\left(I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \right)$.

33. Теорема о сведении 3-го интеграла к повторному.

$$V: \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

34. Теорема о замене переменных в 3-ом интеграле.

$$V(x, y, z) \xrightarrow[\substack{y=y(u, v, w) \\ z=z(u, v, w)}}{x=x(u, v, w)} V'(u, v, w)$$

Пусть выполнено:

- 1) V, V' — замкнуты и ограничены
- 2) Соответствие взаимно — однозначное
- 3) $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \in C^1_{(V')}$
- 4) $I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$ в V ,

Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |I| du dv dw.$$

35. Определение последовательности множеств, монотонно исчерпывающих данное.

Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых связных множеств монотонно исчерпывает множество D , если:

- 1) $\forall n \quad \overline{D_n} \subset D_{n+1};$
- 2) $\bigcup_n D_n = D.$

36. Определение сходимости кратного несобственного интеграла.

Пусть для любой последовательности $\{D_n\}$ (все $\overline{D_n}$ — кубируемые множества), монотонно исчерпывающей множество D , существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\overline{D_n}} \dots \int f(\overline{x}) d\overline{x}$, который не зависит от выбора $\{D_n\}$. Тогда кратный несобственный интеграл $\iint_D \dots \int f(\overline{x}) d\overline{x}$ сходится и равен этому пределу.

37. Признак сравнения сходимости кратных несобственных интегралов.

Пусть $0 \leq f(\overline{x}) \leq g(\overline{x}), \forall \overline{x} \in D$. Тогда из сходимости $\iint_D \dots \int g(\overline{x}) d\overline{x}$ следует сходимость

$$\iint_D \dots \int f(\overline{x}) d\overline{x}. \text{ Из расходимости } \iint_D \dots \int f(\overline{x}) d\overline{x} \text{ следует расходимость } \iint_D \dots \int g(\overline{x}) d\overline{x}$$

38. Связь между абсолютной и условной сходимостью кратных несобственных интегралов.

Пусть $D \subset E^n$. Если $n \geq 2$ то $\iint_D \dots \int f(\overline{x}) d\overline{x}$ и $\iint_D \dots \int |f(\overline{x})| d\overline{x}$ сходятся и расходятся одновременно.

39. Частный признак сравнения сходимости кратных несобственных интегралов

Пусть $g(\overline{x}) = |\overline{x}|^{-p}$, где $|\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Тогда

- 1) Если $D = \{|\overline{x}| > a\}$, то $\iint_D \dots \int f(\overline{x}) d\overline{x} \xrightarrow{p > n} \nrightarrow p \leq n$
- 2) Если $D = \{|\overline{x}| < a\}$, то $\iint_D \dots \int f(\overline{x}) d\overline{x} \xrightarrow{p < n} \nrightarrow p \geq n$

40. Определение поверхностного интеграла I рода.

Пусть S — гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность.

Пусть на поверхности S определена функция $f(u)$, которая ограничена на S . Разобьем поверхность S гладкими кривыми на конечное число частей S_i . Пусть Δ — максимальный размер частей S_i .

Обозначим σ_i — площадь S_i . Предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i f(M_i) \sigma_i$, $M_i \in S_i$ называется поверхностным

интегралом I рода от функции $f(u)$ по поверхности S , если он существует и не зависит от выбора S_i, M_i

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i f(M_i) \sigma_i = \int_S f(M) dS$$

41. Теорема о сведении поверхностного интеграла I рода к 2-му интегралу.

Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на S . Если поверхность S задана в виде:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$x, y, z \in C'(\Omega),$$

$$\text{то } \int_S f(M) dS = \iint_{\Omega_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \text{ где}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Определение поверхностного интеграла II рода.

Пусть S — гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность.

Функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ определены и ограничены на S .

$\{S_i\}$ — разбиение S гладкими кривыми с диаметром Δ .

$$\{M_i\} \in S_i, \bar{n}(M_i) = \{\cos x, \cos y, \cos z\}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \text{площадь } S_i \\ \sigma_x &= \sum_i P(M_i) \cos x \sigma_i \\ \sigma_y &= \sum_i Q(M_i) \cos y \sigma_i \\ \sigma_z &= \sum_i R(M_i) \cos z \sigma_i \end{aligned}$$

Если при $\Delta \rightarrow 0$ существуют пределы сумм $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ не зависящие от выбора S_i, M_i , то эти пределы называются поверхностными интегралами II рода

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_x = \iint_S f(M) \cos x dS$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_y = \iint_S f(M) \cos y dS$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_z = \iint_S f(M) \cos z dS$$

$$\bar{a} = (P, Q, R)$$

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}) dS = \iint_S (P \cos x + Q \cos y + R \cos z) dS = \iint_S P dx dy + Q dx dz + R dx dy - \text{общий поверхностный}$$

интеграл II рода

43. Теорема о сведении поверхностного интеграла II рода к 2-му интегралу.

Пусть поверхность S задана параметрически: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \in C(\Omega)$.

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

$$\cos x = \pm \frac{A}{L}, \cos y = \pm \frac{B}{L}, \cos z = \pm \frac{C}{L}, L = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, dS = L du dv$$

$$\iint_S (P \cos x + Q \cos y + R \cos z) dS = \pm \iint_{\Omega(u, v)} (\tilde{P} A + \tilde{Q} B + \tilde{R} C) du dv, \text{ где}$$

$$\tilde{P} = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = P(u, v)$$

$$\tilde{Q} = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = Q(u, v)$$

$$\tilde{R} = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = R(u, v)$$

44. Определение криволинейного интеграла I рода.

Пусть l — спрямляемая кривая без самопересечений, $\{l_k\}$ — разбиение $l, \Delta = \max_k \Delta l_k$

Функция $f(M)$ — определена и ограничена на $l, M_k \in l_k$

$$\sigma_l = \sum_k f(M_k) \Delta l_k$$

Если существует предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_l$, независимый от выбора l_k и M_k , то этот предел называется

криволинейным интегралом I рода $\left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_I = \int_l f(M) dl \right)$

45. Теорема о сведении криволинейного интеграла I рода к определенному интегралу

Пусть кривая l задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$x, y, z \in C'_{[t_0, T]}, t_0 < T$ $f(M)$ – непрерывна на кривой l . Тогда

$$\int_l f(M) dl = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

46. Определение криволинейного интеграла II рода.

Пусть l – кривая без самопересечения,

Функции $P(M), Q(M), R(M)$ – определены и ограничены на l $\{l_k\}$ – разбиение $l, \Delta = \max_k \Delta l_k, M_k \in l_k$

$$\sigma_{II} = \sum_k P(M_k) \Delta x_k + Q(M_k) \Delta y_k + R(M_k) \Delta z_k$$

Если существует предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_{II}$, независимый от выбора l_k и M_k , то этот предел называется

криволинейным интегралом II рода $\left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_{II} = \int_l P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz \right)$.

47. Теорема о сведении криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу.

Пусть кривая l задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, x, y, z \in C'_{[t_0, T]}, P(M), Q(M), R(M) \text{ – непрерывны на кривой } l, \text{ Тогда}$$

$$\int_l P dx + Q dy + R dz = \int_{t_0}^T (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

48. Криволинейный интеграл II рода от полного дифференциала.

Пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{R}^3, P(M), Q(M), R(M) \in C(\Omega), C$ – некоторый контур в Ω ,

$\exists u(M): du = Pdx + Qdy + Rdz, M \in \Omega$. Тогда

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(M_2) - u(M_1), \text{ где } M_1, M_2 \text{ – начало и конец контура соответственно.}$$

49. Способ нахождения функции по полному дифференциалу.

Пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{R}^3, P(M), Q(M), R(M) \in C'(\Omega), \forall M \in \Omega$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$. Тогда $\exists u(M): du = Pdx + Qdy + Rdz$, где $M \in \Omega$.

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x_0, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz \quad ((x_0, y_0, z_0) \in \Omega)$$

50. Формула Грина.

Пусть S – односвязная, ограниченная область в $\mathbb{R}^2, C = \partial S$ – замкнутый контур,

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C'_{S \cup \partial S}$. Тогда справедливо:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \text{ – формула Грина.}$$

51. Нахождение площади плоской области с помощью криволинейных интегралов.

$$\text{Площадь } S = \iint_S dx dy = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx, \text{ где } C = \partial S$$

52. Формула Стокса.

Пусть $S = \partial V$ – кусочно – гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность

$C = \partial S$ – простой, замкнутый кусочно – гладкий контур, $P(M), Q(M), R(M) \in C'_{S \cup \partial S}$,

$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – нормаль к поверхности S . Тогда справедливо

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

53. Формула Остроградского.

Пусть V – ограниченный объем в $\mathbb{R}^3$. $S = \partial V$ – кусочно – гладкая, двусторонняя поверхность,
 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – внешняя нормаль к S , $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C'_{V+\partial V}$.
 Тогда справедливо

$$\oint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

54. Определение grad u .

$u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ – скалярное поле в $\mathbb{R}^3$

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \text{ (в декартовой системе координат)}$$

55. Определение div $\vec{a}$.

$\vec{a}(\vec{r}) = (a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \text{ (в декартовой системе координат)}$$

56. Определение rot $\vec{a}$.

$\vec{a}(\vec{r}) = (a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \text{ (в декартовой системе координат)}$$

57. Инвариантная форма формулы Стокса.

$\vec{A} = (P, Q, R)$, $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$, $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – нормаль к S

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) dS$$

58. Инвариантная форма записи формулы Остроградского.

$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – внешняя нормаль к S , $\vec{A} = (P, Q, R)$

$$\oint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = \iiint_V \text{div } \vec{A} dV$$

59. Условие потенциальности векторного поля.

Поле $\vec{A}$ потенциально $\Leftrightarrow$

$\exists u: \vec{A} = \text{grad } u \Leftrightarrow$ криволинейный интеграл II рода не зависит от пути интегрирования $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{A} = 0$

60. Формальные действия с оператором ∇ .

$$\text{Example: } \text{div}(u\vec{a}) = (\nabla, u\vec{a}) = (\nabla, u_c\vec{a}) + (\nabla, u\vec{a}_c) = u_c(\nabla, \vec{a}) + (\nabla u, \vec{a}_c) = u \text{div } \vec{a} + \vec{a} \text{grad } u$$